

Capítulo 2: Revisión de los fundamentos Matemáticos

carlos.platero@unpm.es (C. 305)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

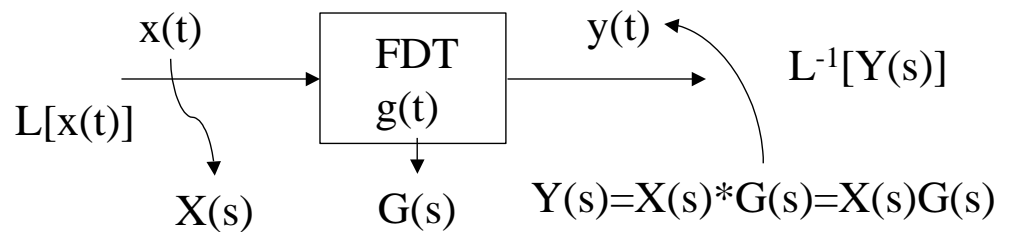
Cartagena99

Fundamentos matemáticos

▶ Señal y sistema

▶ Convolución:

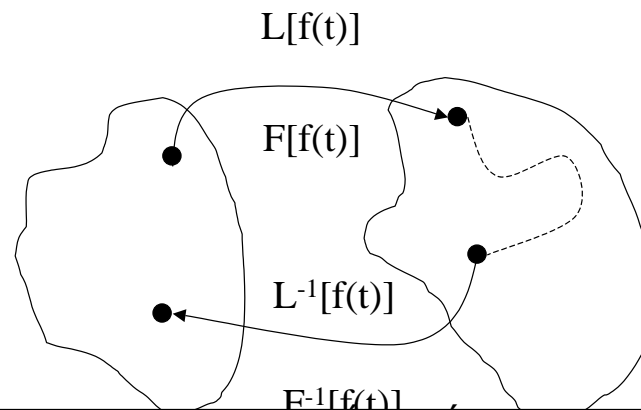
- ▶ continua
- ▶ discreta



$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t x(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

▶ Transformadas

- ▶ Fourier
- ▶ Laplace



Cartagena99

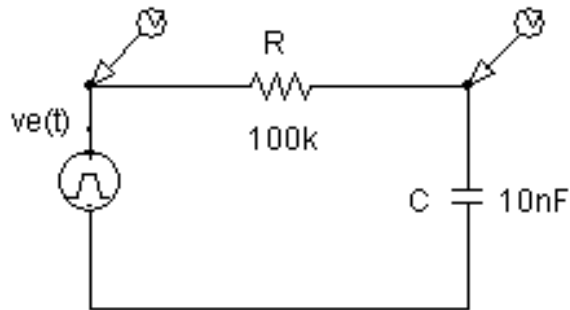
CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

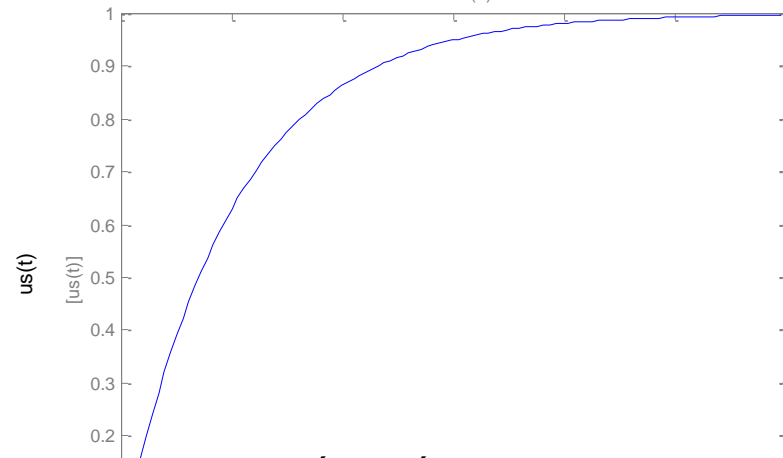
Ejemplo de convolución

► Escalón unitario a un circuito RC

$$u_s(t) = u_e(t) * g(t) = \int_0^t u_e(t-\tau) g(\tau) d\tau$$



Respuesta del cuadripolo RC ante una entrada en escalón
From: U(1)

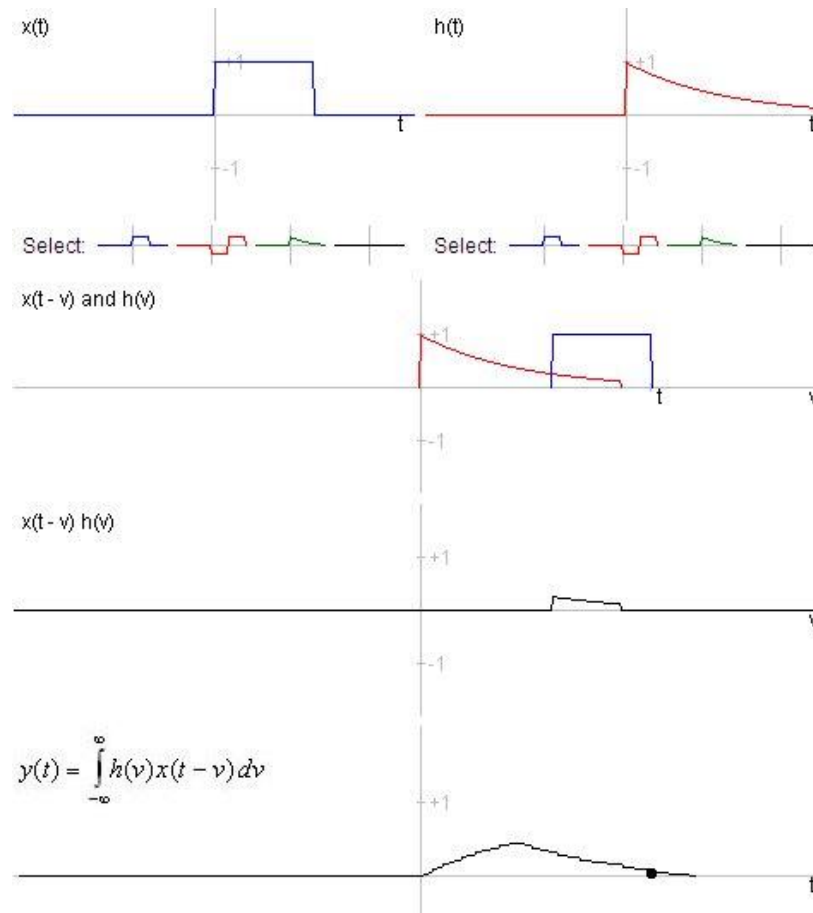


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Demo de convolución continua



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Series de Fourier



- ▶ Sea una función periódica temporal, $f(t)$, de periodo de T , acotada en un intervalo, con un número finito de máximos, mínimos y puntos discontinuos, ésta puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos. A esta serie se la llama de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

Cartagena99

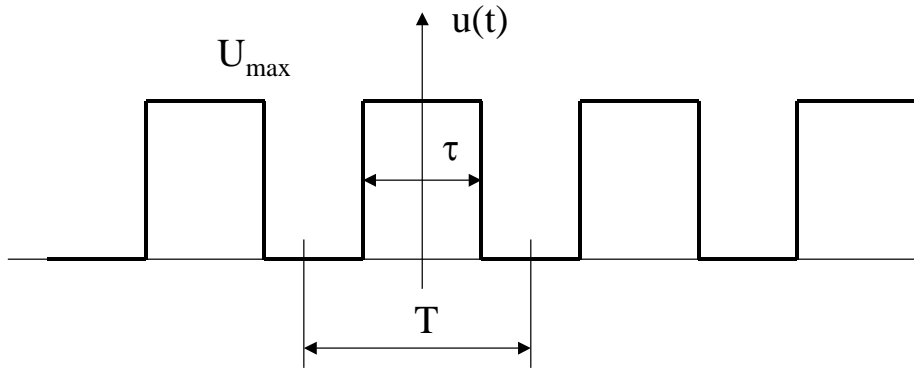
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo 2.1

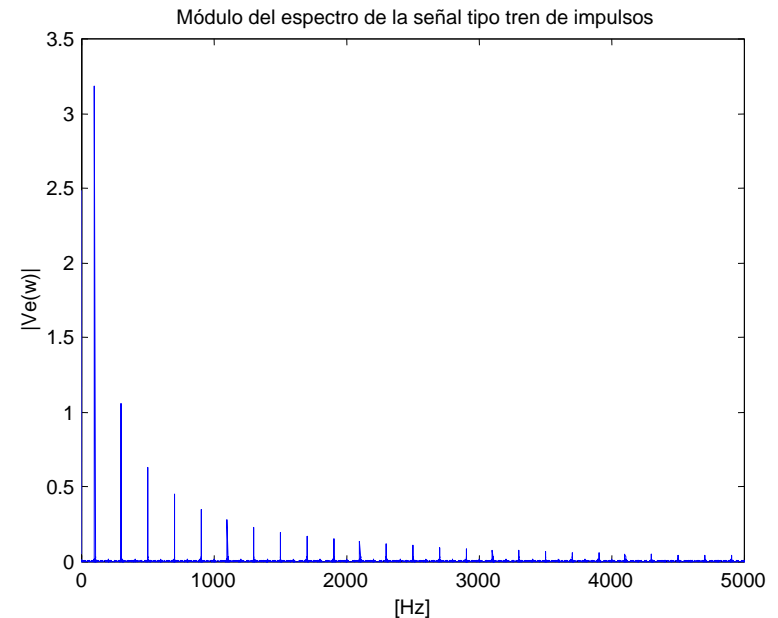
$$f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0$$

$$f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_n = 0$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} dt = U_{\max} \frac{\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2U_{\max}}{\pi n} \operatorname{sen}\left(n \cdot \pi \cdot \frac{\tau}{T}\right)$$



Si la señal es cuadrada de periodo de 10 ms y amplitud 5V:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Applet de Fourier

www.jhu.edu/~signals/fourier2/index.html

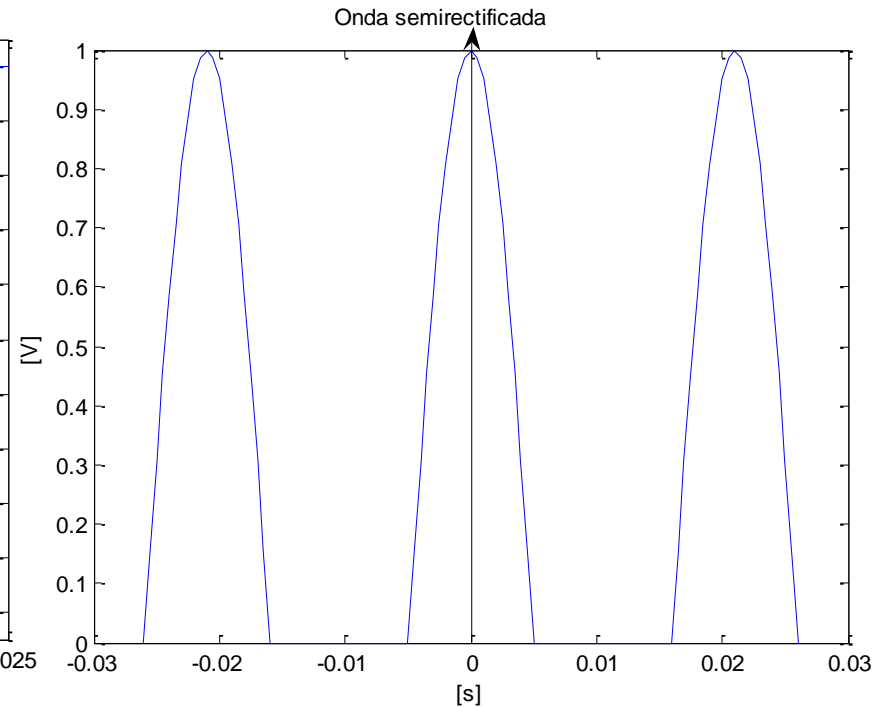
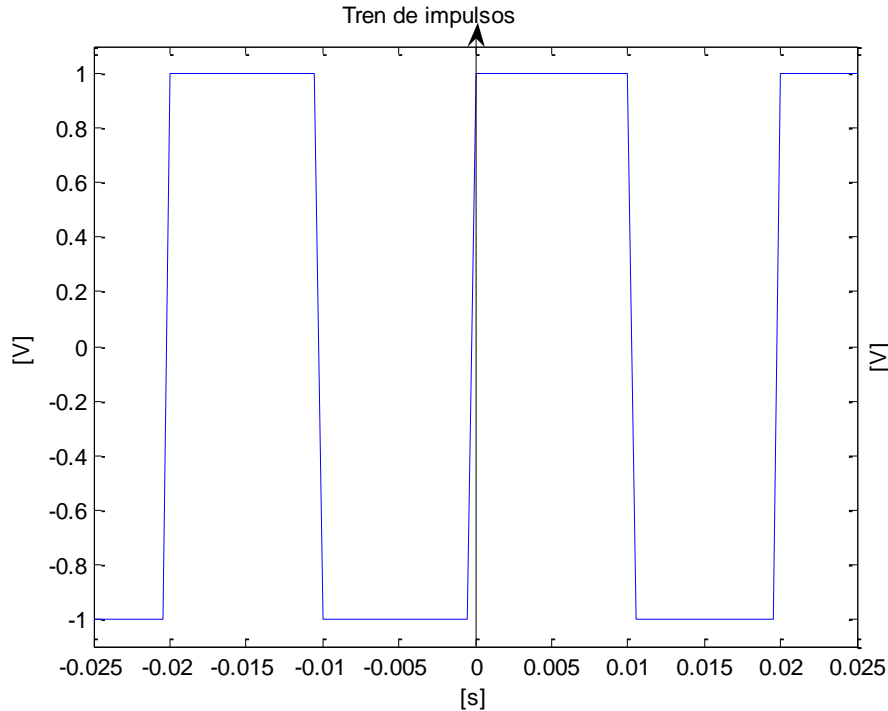


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Problemas para casa

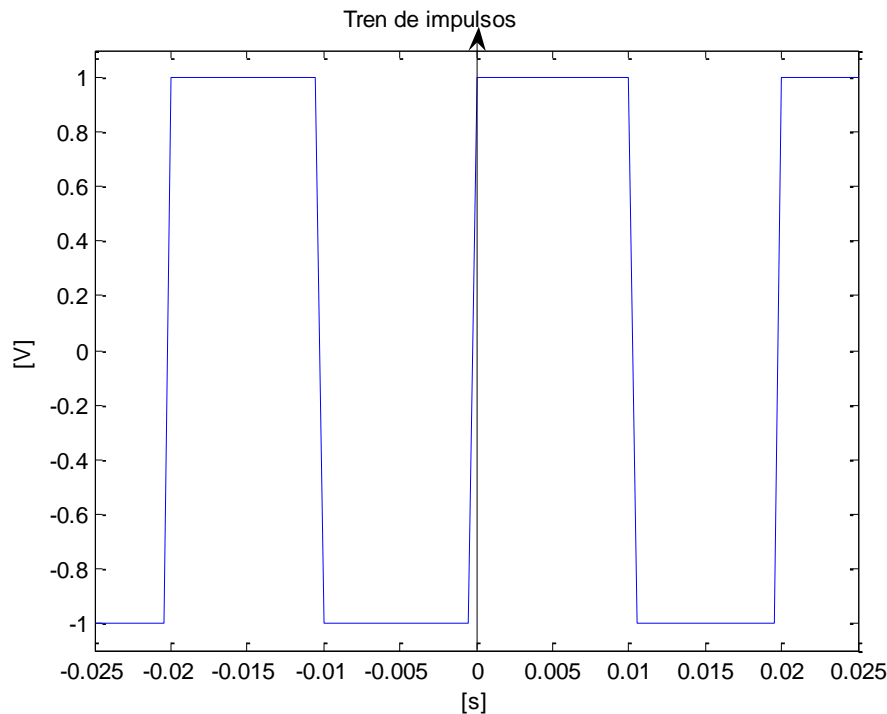


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resolución



$$u_e = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \cdot 100\pi \cdot t)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi \cdot n} [1 - \cos(n\pi)]$$

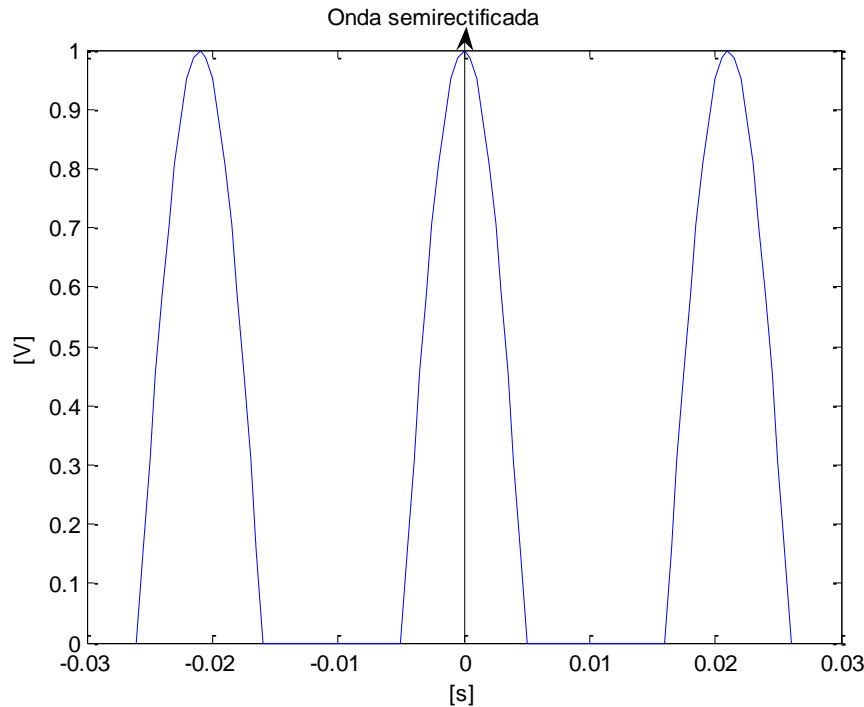
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Resolución



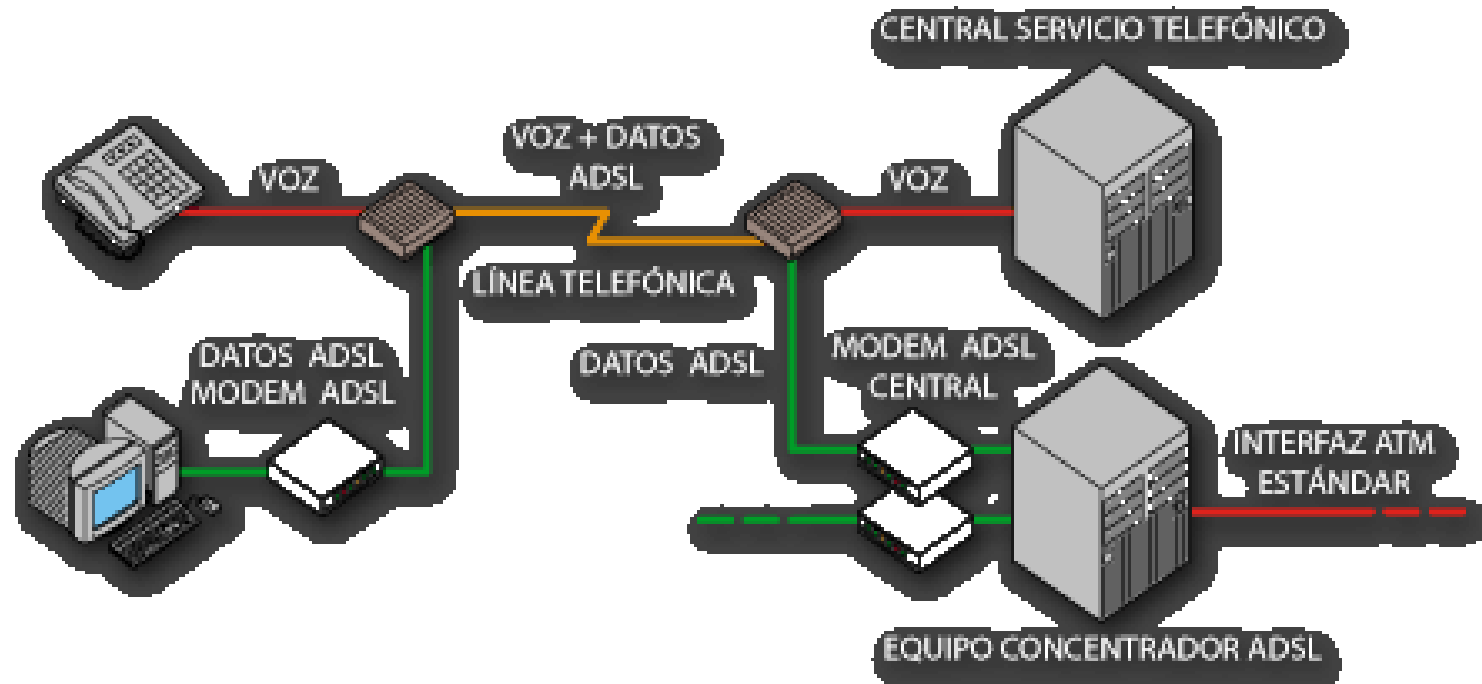
$$u_e = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot 100\pi \cdot t)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{n-1} \right]$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transmisión de señales

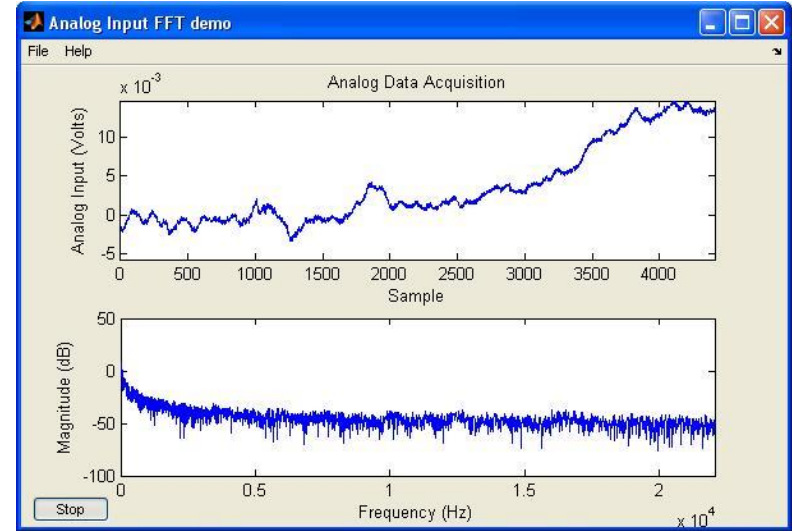


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicio del laboratorio



Cartagena99

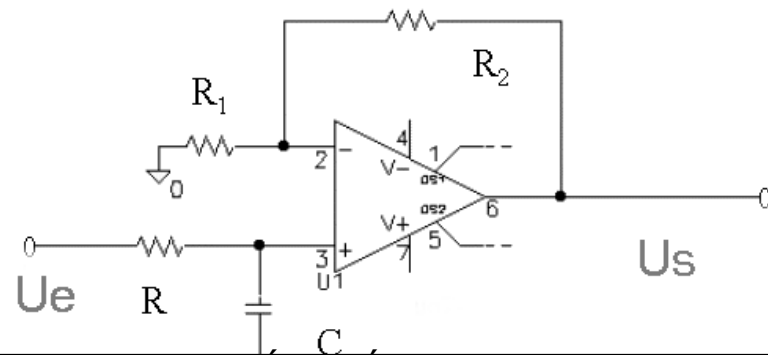
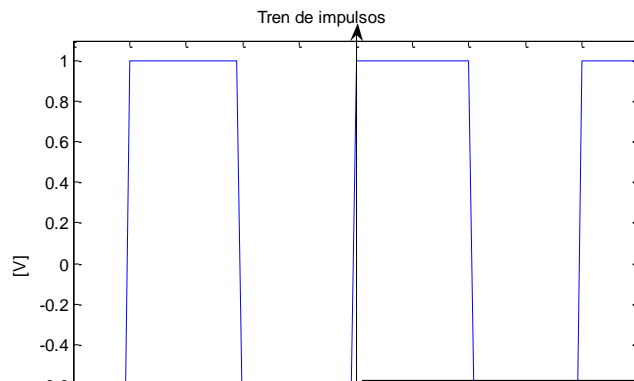
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejercicio de examen

En el circuito de la figura se considera que el amplificador operacional es ideal. Éste es atacado por el tren de impulsos indicado. Se pide:

1. Serie de Fourier de la señal de entrada.
2. Respuesta en frecuencia de la ganancia de tensión del circuito.
3. Diagrama de Bode y curva polar del apartado anterior.
4. Expresión analítica del armónico fundamental de la señal de salida.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

De las series a las transformadas de Fourier

- ▶ Segunda y tercera forma de expresar las series de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t - \psi_n) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \psi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- ▶ Relaciones de Euler

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

De las series a las transformadas de Fourier

- ▶ Tercera forma de expresar las series de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad F(n \cdot \omega_0) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt$$

- ▶ Para la aplicación de la serie de Fourier sobre señales aperiódicas, se procede al artificio matemático de hacer que el periodo de la señal sea infinito, convirtiendo todas las señales en periódicas:

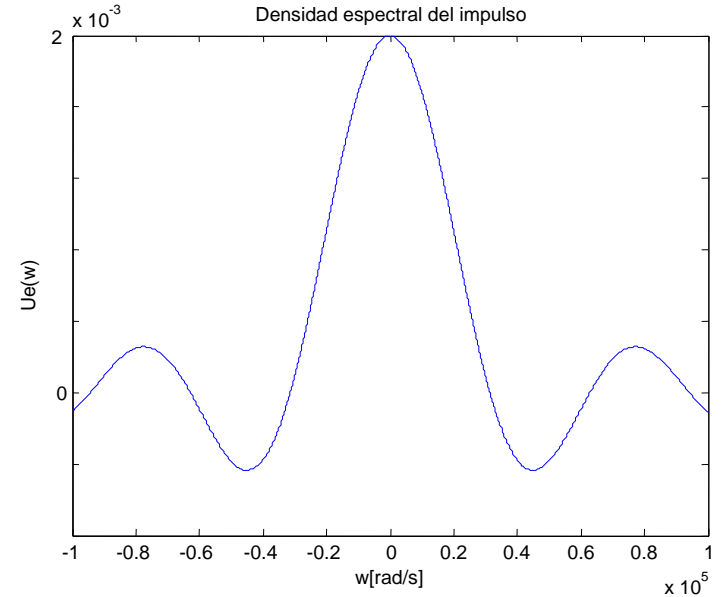
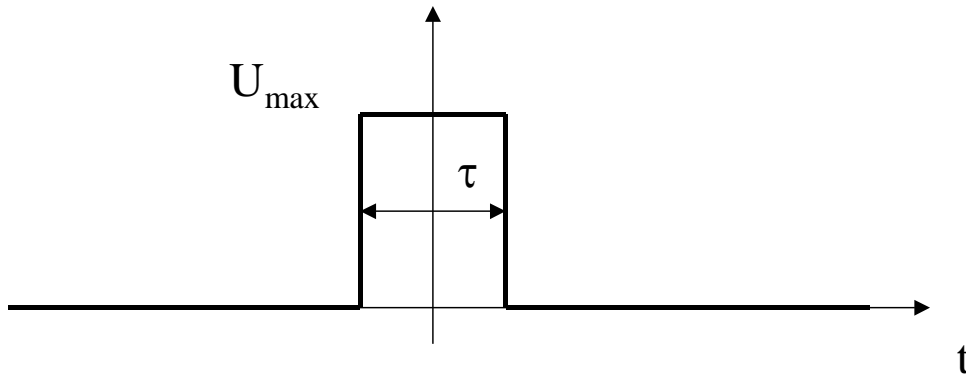
$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n \cdot \omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo 2.2



$$U_e(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_{\max} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = 2U_{\max} \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega} = U_{\max} \cdot \tau \cdot \text{senc}(\omega\tau/2)$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Transformadas de Laplace



- ▶ Las funciones de control no tienen transformadas de Fourier (teorización)
- ▶ Convergencia y causalidad

$$F(\sigma, \omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \xRightarrow{s=\sigma+j\omega} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

▶ Ejemplos

- ▶ Función escalón unitario:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

- ▶ Función exponencial decreciente:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \left[\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

- ▶ **Teorema 1:** Multiplicación por una constante:

$$L(k \cdot f(t)) = k \cdot F(s)$$

- ▶ **Teorema 2:** Suma y resta de dos funciones:

$$L(a \cdot f_1(t) \pm b \cdot f_2(t)) = a \cdot F_1(s) \pm b \cdot F_2(s)$$

- ▶ **Teorema 3:** Diferenciación:

$$L\left(\frac{d(f(t))}{dt}\right) = s \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\left(\frac{d^n(f(t))}{dt^n}\right) = s^n \cdot F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left(s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{d(f(t))}{dt} + s^{n-3} \frac{d^2(f(t))}{dt^2} + \dots + \frac{d^{n-1}(f(t))}{dt^{n-1}} \right)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

▶ **Teorema 4:** Integración:

$$L\left(\int_0^t f(\tau) \cdot d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$L\left(\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) \cdot d\tau \cdot dt_1 \dots \cdot dt_{n-1}\right) = \frac{F(s)}{s^n}$$

▶ **Teorema 5:** Teorema del valor inicial (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

▶ **Teorema 6:** Teorema del valor final (sólo aplicable si $f(t)$ está acotada):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Teoremas importantes de la transformada de Laplace

- ▶ **Teorema 7:** Traslación compleja:

$$L(e^{\pm\alpha} f(t)) = F(s \mp \alpha)$$

- ▶ **Teorema 8:** Traslación temporal:

$$L(f(t-T) \cdot u(t-T)) = e^{-sT} F(s)$$

- ▶ **Teorema 9:** Convolución:

$$L(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) * F_2(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

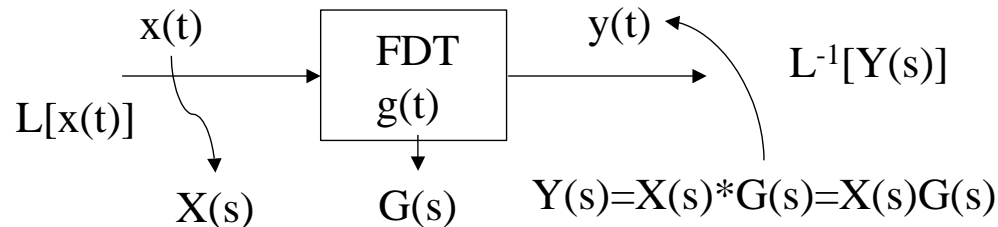
Cartagena99

$\overline{v(t)}$ $\overline{v(t)}$
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Transformada inversa de Laplace mediante la expansión de fracciones simples

▶ Señal y sistema LTI de forma polinómica



▶ Raíces simples

$$X(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s + s_1)} + \frac{k_2}{(s + s_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s + s_n)} \quad \left. \vphantom{Y(s)} \right\} y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{-s_i t}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo 2.3

▶ Respuesta del cuadripolo RC ante una entrada en escalón unitario

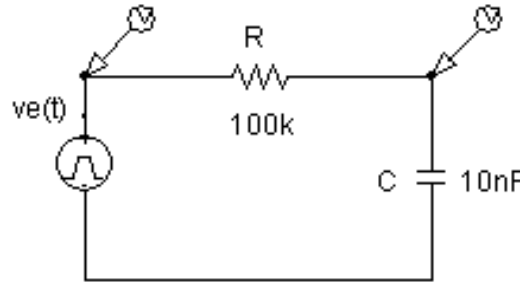
$$u_e(t) = RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

$$A_V(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

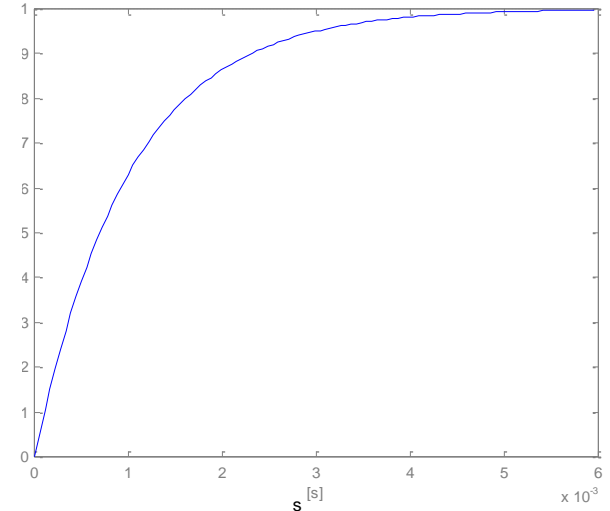
$$U_s(s) = U_e(s)A_V(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + RCs} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$k_1 = [s \cdot U_s(s)]_{s=0} = 1$$

$$k_2 = -\left[\left(s + \frac{1}{RC}\right) \cdot U_s(s)\right]_{s = -\frac{1}{RC}} = -1$$



Respuesta del cuadripolo RC ante una entrada en escalón
From: U(1)



$$u_s(t) = 1 - e^{-t/RC}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Transformada inversa de Laplace mediante la expansión de fracciones simples

► Raíces múltiples

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{(s + s_1) \dots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r} = \frac{k_1}{(s + s_1)} + \dots + \frac{k_{n-r}}{(s + s_{n-r})} + \frac{A_1}{(s + s_i)} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r}$$

$$A_r = \left[(s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i}$$
$$A_{r-1} = \left[\frac{d}{ds} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i}$$
$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{ds^2} (s + s_i)^r Y(s) \right]_{s=-s_i}$$
$$\vdots$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

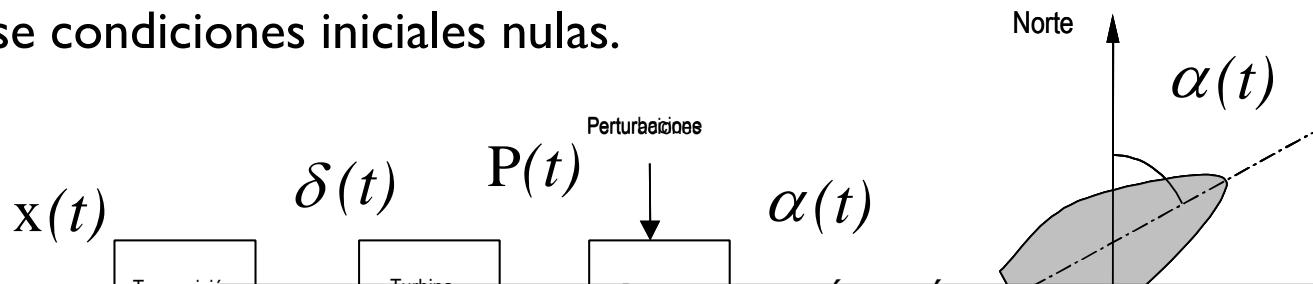
Ejemplo 2.4

- ▶ Determinar el comportamiento dinámico de un barco ante una entrada unitaria en el cambio del timón de éste. Con este propósito se ha extraído un diagrama a bloques y un modelo de comportamiento para un conjunto de velocidades válidas. Así, se observa que el ángulo $\delta(t)$ dado en radianes del timón, provoca un par de giro sobre el barco de $P(t) = 500 \frac{Nm}{rad} \cdot \delta(t)$, el cual provoca un giro sobre el barco según la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{\alpha}(t) + 10\ddot{\alpha}(t) = 0.002 P(t)$$

Por otro lado, el sistema de transmisión mecánica del timón de control, $x(t)$, al timón del barco, responde a: $\delta(t) + \dot{\delta}(t) = x(t)$

Considérese condiciones iniciales nulas.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Ejemplo 2.4

$$G_1(s) = \frac{\delta(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{P(s)}{\delta(s)} = 500$$

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s)}{P(s)} = \frac{0.002}{s(10 \cdot s + 1)}$$

$$\alpha(s) = X(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)$$

$$\alpha(s) = \frac{1}{s} \frac{0.1}{s(s+1)(s+0.1)} = \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+0.1)}$$

$$a_2 = [s^2 \alpha(s)]_{s=0} = 1$$

$$a_1 = \left[\frac{d}{ds} (s^2 \alpha(s)) \right]_{s=0} = -11$$

$$k_1 = [(s+1)\alpha(s)]_{s=-1} = -\frac{1}{9}$$

$$k_2 = [(s+0.1)\alpha(s)]_{s=-0.1} = \frac{100}{9}$$

$$\alpha(t) = t - 11 - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{100}{9}e^{-0.1t}$$

$v(t)$

$\delta(t)$

$P(t)$

$\alpha(t)$

Perturbaciones

Norte

$\alpha(t)$

CLASES PARTICULARES, TUTORIAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

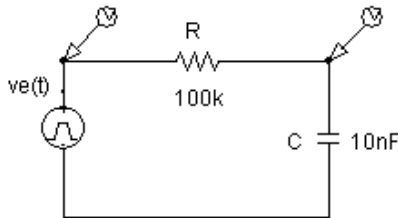
Cartagena99

Uso de Matlab en las transformadas de Laplace

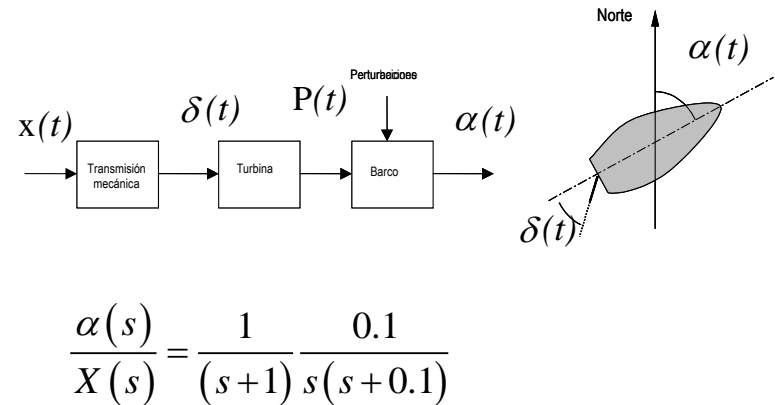
► FDT y estímulo al escalón unitario

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots a_ns^n}$$

```
>> g = tf([b_m b_{m-1} ... b_2 b_1 b_0],[a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0])
```



$$A_V(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$



$$\frac{\alpha(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)} \frac{0.1}{s(s+0.1)}$$

```
>>%Circuito RC
```

```
>> g1 = tf(1,[1e-3 1])
```

```
>>%Control del barco
```

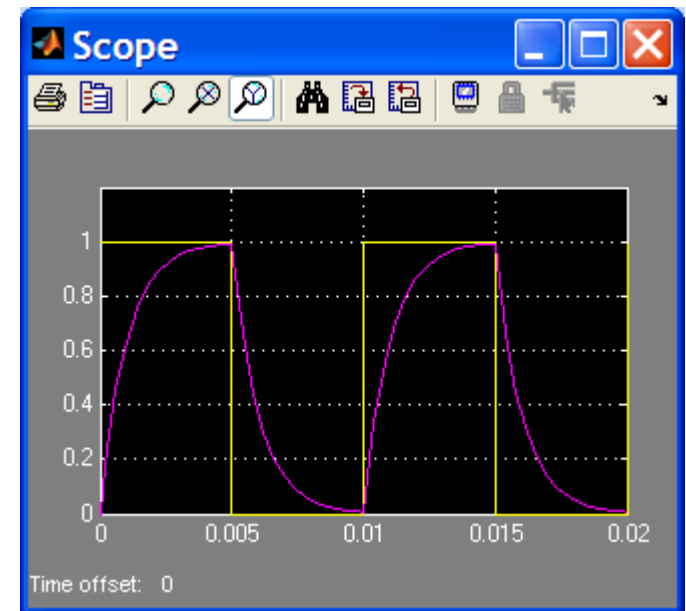
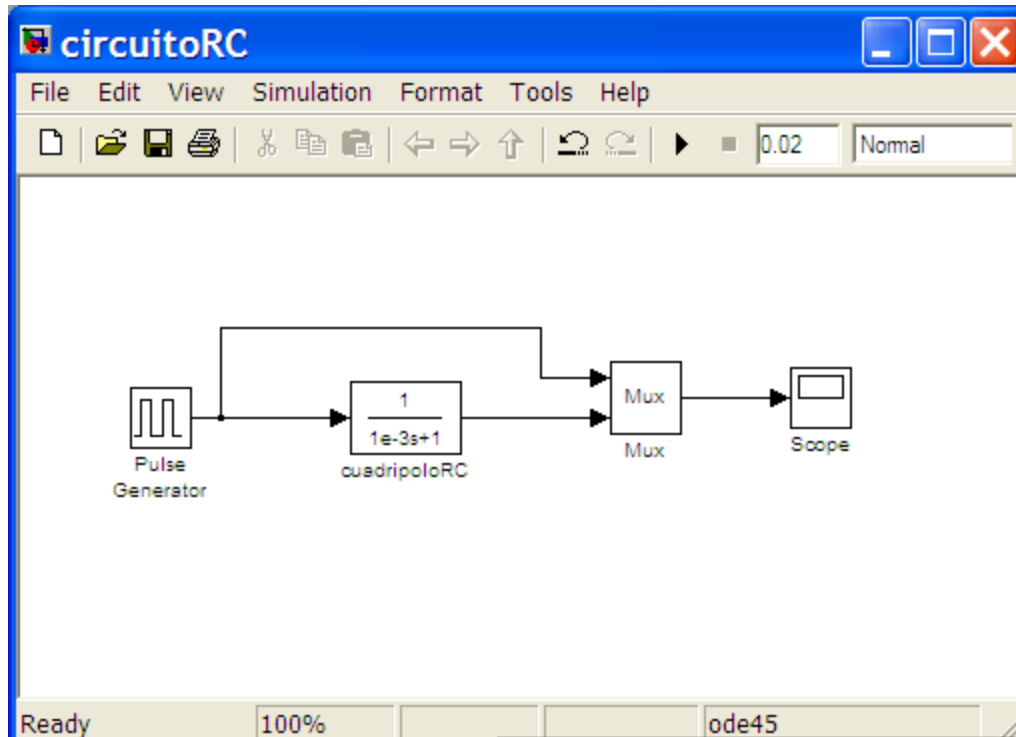
```
>> g2 = tf(0.1,poly([0 -0.1 -1]))
```

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Simulink (programación gráfica)



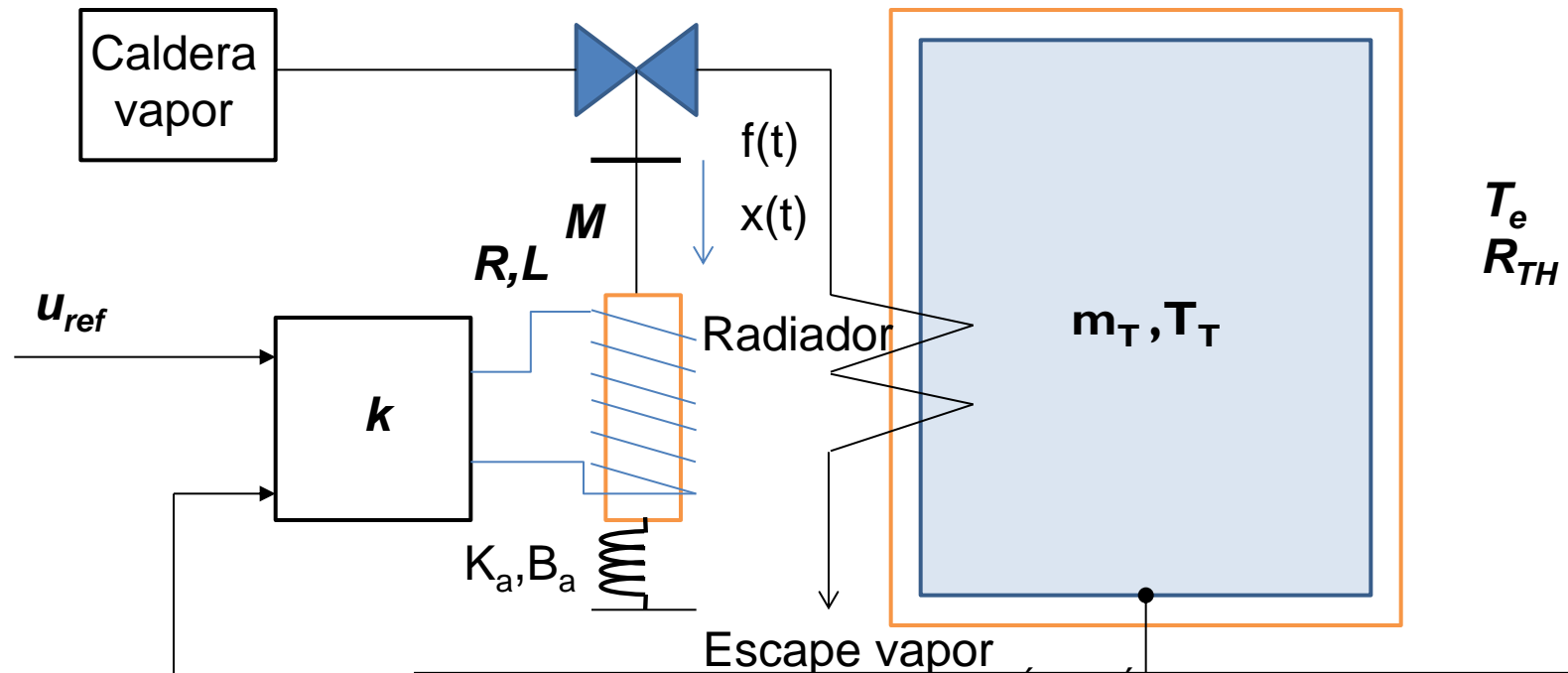
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Parcial noviembre 2016

- ▶ ¿Cómo funciona? ¿Cuál es el diagrama de bloques?

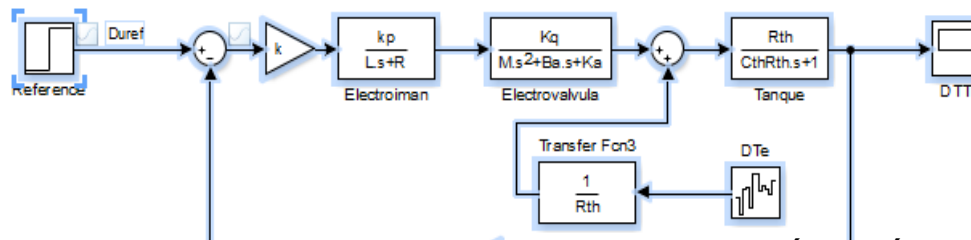
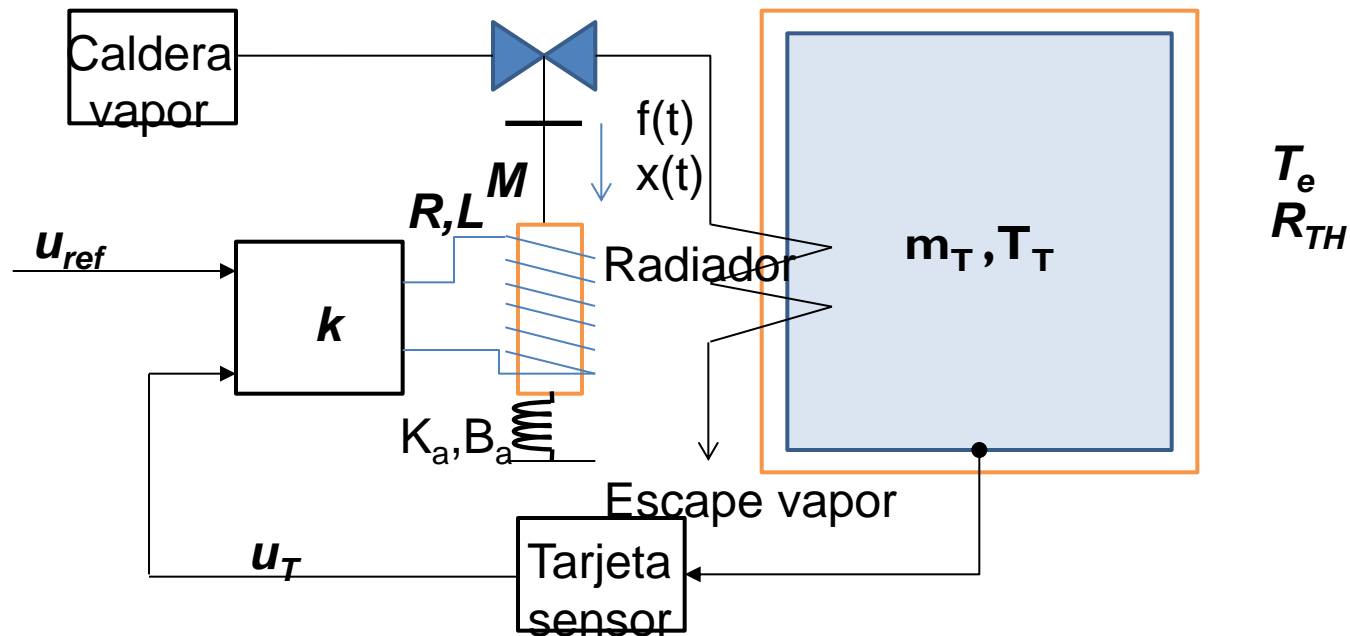


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Parcial noviembre 2016



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Problema 2.3

El sistema de control de una locomotora eléctrica está basado en una estructura de realimentación negativa. La velocidad de mando es convertida en una señal eléctrica con ganancia unitaria, la cual es comparada con la tensión de salida de un sensor de velocidad de traslación del tren, con ganancia k_T . La señal de error ataca a un amplificador de tensión con ganancia k . Esta etapa se conecta con el motor eléctrico de la locomotora, generando la fuerza de empuje del tren. Se pide:

1. Para determinar la función de transferencia del motor, se le aplica una función en escalón de 100V a la entrada del motor. La fuerza de empuje se registra y describe la siguiente evolución temporal:

$$f(t) = 5000 \cdot \left(1 - 1.5 \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 0.5 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \right)$$

Obtener la FDT del motor.

2. Diagrama a bloques del sistema de control de la locomotora.



Datos: Masa del tren = 138 toneladas, $k = 20$, Constante del sensor de velocidad, $k_T = 1$ [V/m/s]

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Problema 2.3

- ▶ Por la expresión temporal, la transformada de Laplace de la fuerza del motor aplicando el teorema de traslación compleja y descomposición en fracciones simples será del tipo:

$$F(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{\left(s + \frac{1}{30}\right)} + \frac{k_3}{\left(s + \frac{1}{10}\right)} \qquad \frac{F(s)}{u_m(s)} = \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)}$$

- ▶ Para determinar k_m se aplicará el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot F(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{100}{s} \frac{k_m}{\left(s + \frac{1}{30}\right)\left(s + \frac{1}{10}\right)} = 5000 \Rightarrow k_m = \frac{1}{6}$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

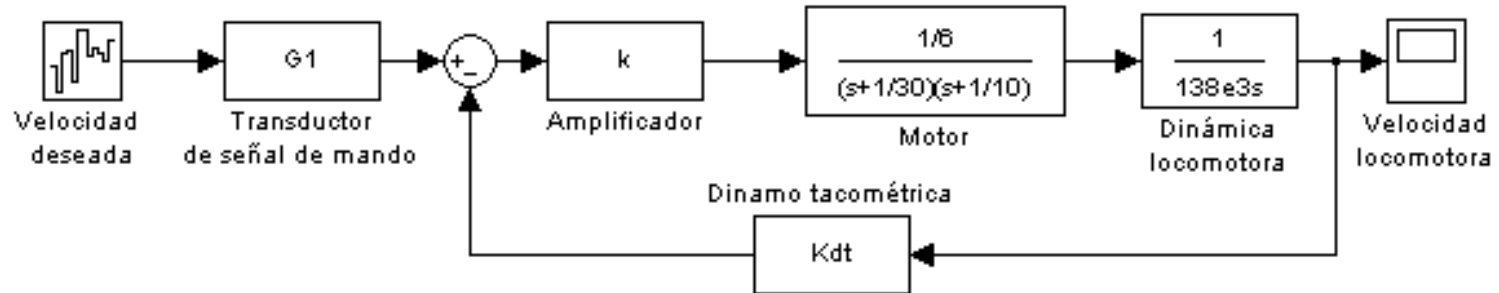
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Problema 2.3

La relación entre la fuerza aplicada a la locomotora y su velocidad será:

$$f = m_T \cdot \dot{v}_T \Rightarrow \frac{v_T(s)}{F(s)} = \frac{1}{m_T \cdot s}$$

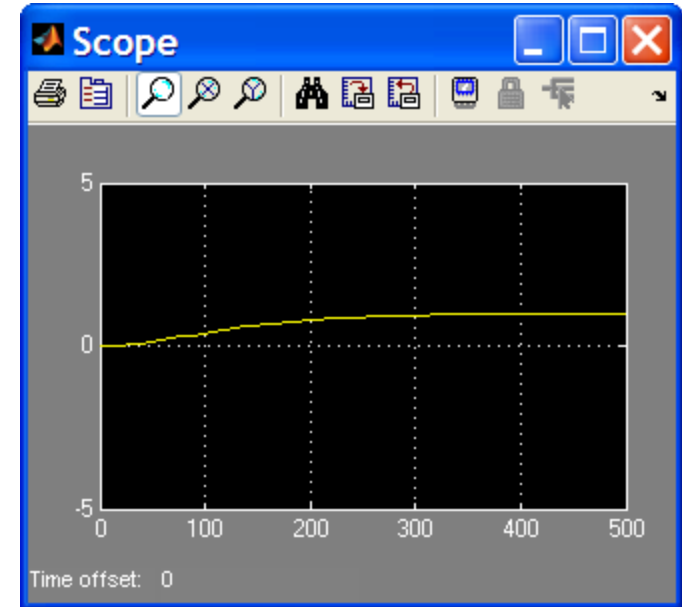
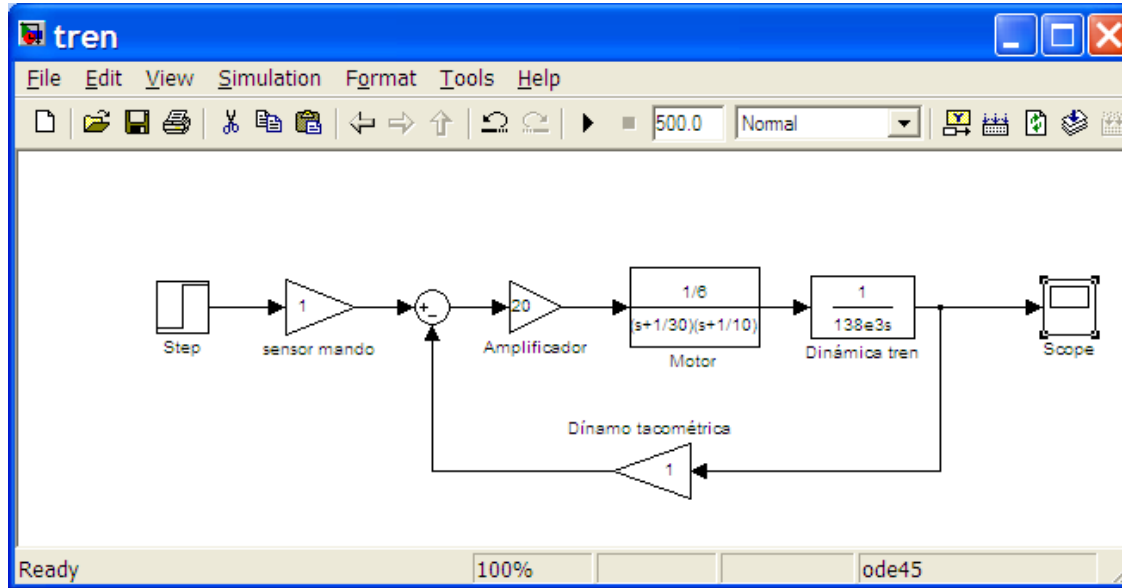


Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Problema 2.3



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Problema 2.3 (casa)

Se desea el control automático de altura de un globo aerostático. Para ello se dispone de un quemador de gas controlado eléctricamente, de forma que ante una señal de referencia de 1 [V], dicho quemador aporta 1 Kcal/seg al aire contenido en el globo. Tras linealizar las ecuaciones, se obtienen las siguientes ecuaciones que modelan su comportamiento:

$$\frac{d\Delta T(t)}{dt} = 0,3\Delta Q(t) - 0,1\Delta T(t)$$
$$\frac{d\Delta Z(t)}{dt} = \int_0^t \Delta T(t) - 2\Delta Z(t)$$



Para poder cerrar el lazo de control se dispone de un altímetro electrónico cuyo cero se ha fijado a la altura de linealización de las ecuaciones. Dicho altímetro da una señal de 10 mV/m . La referencia al sistema de control inicialmente se da por medio de un potenciómetro lineal calibrado de forma que a un incremento de 1 metro en la referencia provoca un incremento en la tensión de referencia de 10 mV.

- Determinar el diagrama de bloques y la dinámica del globo ante una entrada en escalón unitario.

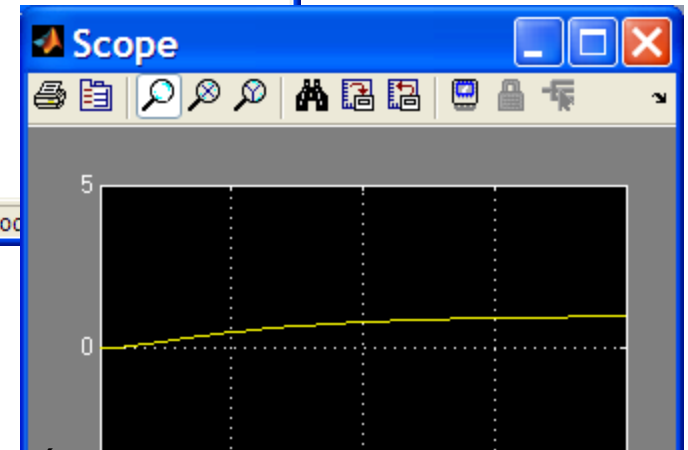
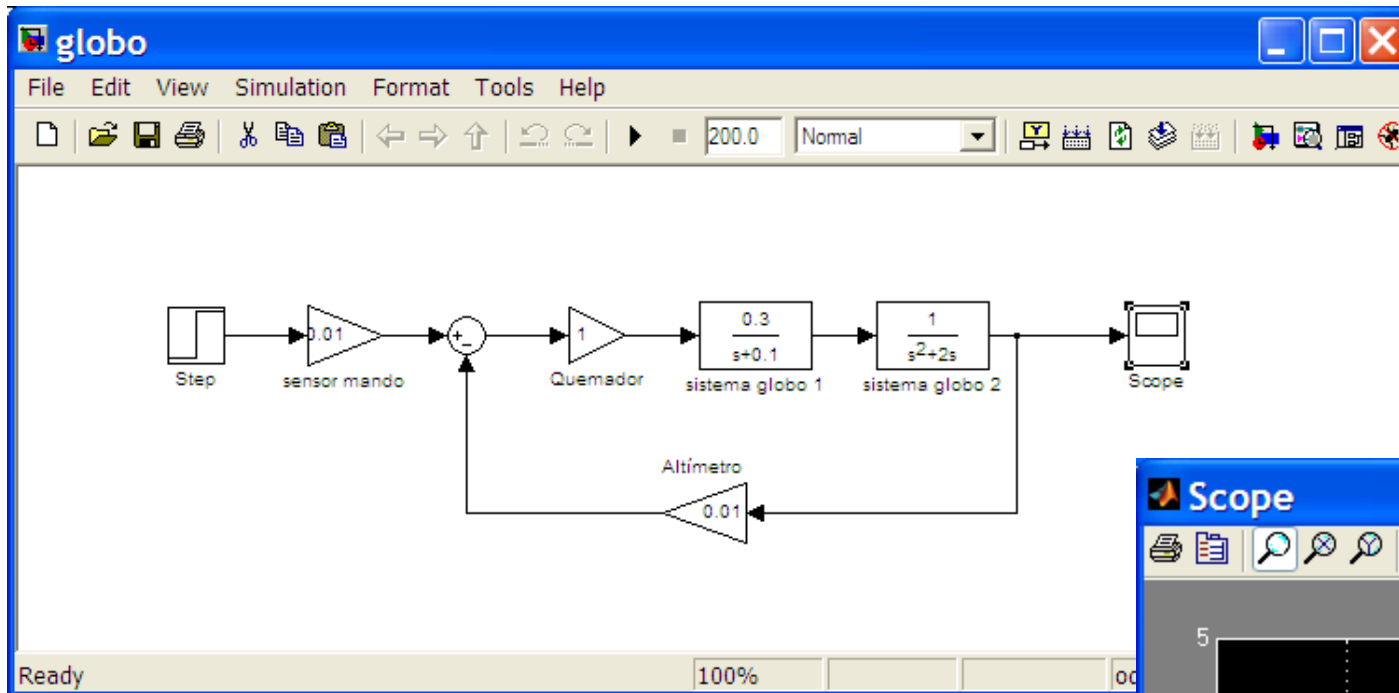
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Problema del globo



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70